

УДК 623.407

Вадим Пісьціо, Ірина Белякова, к.т.н., Володимир Медвідь, к.т.н., доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОПТИМІЗАЦІЯ ВЛАСНОЇ ФОРМИ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

У роботі запропонована методика оптимізації власної форми коливань п'єзоелектричного трансформатора на основі його одновимірної моделі. Наведені результати моделювання у програмі FreeFem++.

Ключові слова: п'єзоелектричний трансформатор, оптимізація конструкції, FreeFem++

Vadym Piscio, Iryna Belyakova, Volodymyr Medvid OPTIMIZING OWN FORMS OF VIBRATIONS OF A PIEZOELECTRIC TRANSFORMER

In this paper suggests a technique for optimizing own form of oscillation of piezoelectrical transformer based on its one-dimensional model. The resulted results of modeling in FreeFem ++ program.

Keywords: piezoelectric transformer, design optimization, FreeFem ++.

Розглянемо задачу оптимізації форми плоского п'єзотрансформатора струму (ПТ) з поляризацією за товщиною пластини. Нехай пластина має товщину h , а її середня площа співпадає з площиною xOy . Матеріал має густину ρ .

Припустимо, що бічні поверхні п'єзотрансформатора вільні від електродів, а верхня і нижня поверхні покриті системою електродів, зазор між якими наближається до 0. Для зменшення втрат енергії п'єзотрансформатор звичайно закріплюють так, щоб його поверхні не передавали зусилля на закріплення. Така умова приводить до граничної умови: $\sigma_{ij}n_j = 0$, де n_j - вектор зовнішньої нормалі. У випадку одновимірних коливань з коловою частотою ω по довжині (координаті x) при змінній ширині $b(x)$ п'єзотрансформатора та симетрії ПТ відносно осі Ox рівняння, що описують його, можуть бути записані у вигляді:

$$\frac{d}{dx}(b\sigma_{11}) + \rho\omega^2 b u_1 = 0;$$
$$\frac{d}{dx} u_1 = s_{11}\sigma_{11} + \frac{d_{31}}{h \cdot b} \int_{-b/2}^{b/2} \varphi(x, y) dy,$$

де $\varphi(x, y)$ - різниця потенціалів між верхнім і нижнім електродами ПТ, яка залежить, в загальному випадку, від двох координат. Так як п'єзотрансформатор найчастіше працює у режимі, близькому до резонансу, можна вважати, що розподіл напружень у трансформаторі буде такий самий, як при власній формі коливань.

Тоді система рівнянь спроститься і може бути записана у вигляді одного рівняння другого порядку:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{b} \frac{d}{dx} (b\sigma_{11}) \right) + \rho\omega^2 s_{11}\sigma_{11} = 0$$

У випадку оптимальної форми ПТ напруження σ_{11} у матеріалі ПТ наближаються до $[\sigma]$, а форма ПТ має наближатись до такої, що описується наступним рівнянням:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{b} \frac{d}{dx} (b[\sigma]) \right) + \rho\omega^2 s_{11}[\sigma] = 0.$$

Цю залежність можна вважати диференціальним рівнянням відносно b , що має

загальний розв'язок, котрий може бути записаний у вигляді:

$$b(x) = B \exp\left(-\frac{\rho \omega^2 s_{11} x^2}{2} + A \cdot x\right).$$

Невідома стала A лише призводить до переміщення п'єзотрансформатора по осі x , а при $A = 0$ невідома стала B визначається необхідною потужністю ПТ.

Легко зрозуміти, дефект такої оптимальної форми полягає в тому, що оптимальна форма п'єзопластики має мати нескінчену довжину, так як у іншому випадку напруження σ_{11} ніколи не досягнуть нульового значення. Але, якщо примусово задати при $|x| > l_r$ ширину $b(x)$, що рівна $b(l_r)$, довжина такої ділянки має бути такою, щоб напруження у матеріалі спали до нуля.

Отримана форма ПТ буде близькою до оптимальної і тим ближче до оптимальної, чим більше l_r .

Графік залежності коефіцієнту використання матеріалу від l_r для п'єзотрансформатора із матеріалу PZT-4 із робочою частотою 78 кГц зображений на рис. 1. Коефіцієнт використання матеріалу визначається за формулою:

$$K_M = \frac{\int_V \sigma_{11} dV}{V \cdot [\sigma]}$$

де $[\sigma]$ - максимальнодопустимі механічні напруження у матеріалі, V - об'єм п'єзотрансформатора

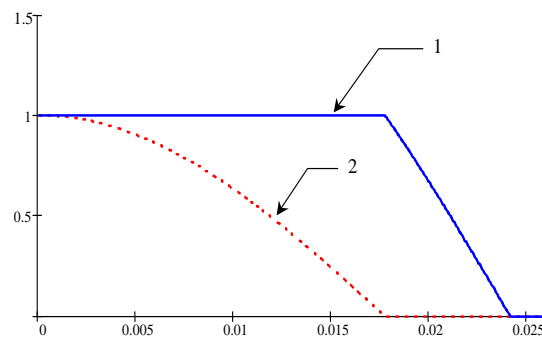


Рис. 1. Розподіл усереднених по ширині напружень у матеріалі п'єзотрансформатора у долях від $[\sigma]$

1 - пропонується п'єзотрансформатор, 2 - стандартний п'єзотрансформатор постійної ширини

Ескіз відповідної форми п'єзотрансформатора із матеріалу PZT-4 представлений на рис. 2 ($l_r = \frac{1}{4 \cdot f \sqrt{\rho \cdot s_{11}}} = 0.018$). Пунктирними лініями зображено п'єзотрансформатор

"класичної" форми поперечно-поперечного типу із таким самим значенням електричних параметрів.

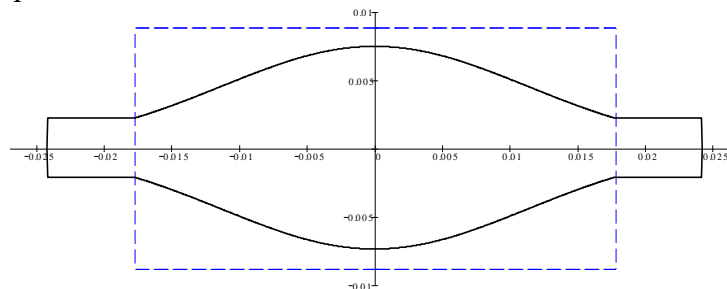


Рис. 2. Форма п'єзотрансформатора, що пропонується у порівнянні із класичним

Розподіл усереднених по ширині механічних напружень σ_{11} (у долях $[\sigma]$) у п'єзотрансформаторі зображений на рис. 1.

Із графіка видно, що напруження у матеріалі пропонуваного п'єзотрансформатора близькі до максимально допустимих практично по всьому матеріалі ПТ, крім прикінцевих областей, вклад котрих у загальну роботу матеріалу не значний.

Для підтвердження розвинутих положень було проведено 2-d моделювання п'єзотрансформатора за допомогою програми FreeFem++. Для моделювання використовувався функціонал, що описує коливання п'єзотрансформатора у наступній формі:

$$J(u,v) = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x} v_1 \right) \cdot \left(c_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_1 + c_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} v_2 \right) \cdot \left(c_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_1 + c_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_2 \right) + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2 + \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) \cdot (c_{66}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} u_2 + \frac{\partial}{\partial y} u_1 \right) + \rho \omega^2 \lambda (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) ds,$$

де v - пробні переміщення.

Далі проводилась дискретизація області за допомогою методу скінчених елементів із використанням базисних функцій другого порядку, будувалась відповідні глобальні матриці і розв'язувалась стандартна задача відносно власної форми коливань.

Потім, на основі розрахованих форм власних переміщень, за допомогою співвідношень:

$$\sigma_{11} = c_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_1 + c_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_2 \quad \sigma_{22} = c_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_1 + c_{11} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_2 \quad \sigma_{12} = c_{66} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u_2 + c_{66} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_1$$

отримувались значення напружень у матеріалі, котрі відразу нормувались так, щоб максимальні напруження були не більші за $[\sigma]$.

Далі обчислювався коефіцієнт використання матеріалу за формулою:

$$K_M = \frac{\int \sigma_{11} dV}{V \cdot [\sigma]}$$

Для порівняння, паралельно проводилось моделювання п'єзотрансформатора звичайної форми. Розподіл найвищих напружень у матеріалі (σ_{11}) поданий на наступних рисунках.

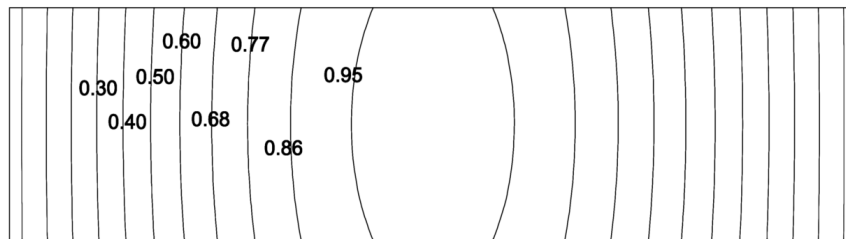


Рис. 3. Розподіл σ_{11} по ширині п'єзотрансформатора "звичайної" форми

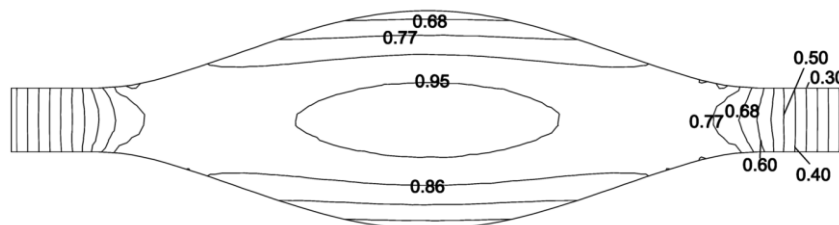


Рис. 4. Розподіл σ_{11} по ширині п'єзотрансформатора форми, що пропонується

Із порівняння рисунків видно, що напруження у п'єзотрансформаторі, який пропонується, розподілені значно рівномірніше. Це дозволяє отримати вищий коефіцієнт використання матеріалу, покращити техніко-економічні показники п'єзотрансформаторів та знизити їх вартість.